**Lecture 10**

**MACLAURIN POLYNOMIALS**

It is natural to ask whether one can improve on the accuracy of a local quadratic approximation by using a polynomial of degree 3. Specifically, one might look for a polynomial of degree 3 with the property that its value and the values of its first three derivatives match those of *f* at a point; and if this provides an improvement in accuracy, why not go on to polynomials of even higher degree? Thus, we are led to consider the following general problem.

**Problem.** Given a function *f* that can be differentiated *n* times at *x* = *x*0, find a polynomial *p* of degree *n* with the property that the value of *p* and the values of its

first n derivatives match those of f at x0.

We will begin by solving this problem in the case where *x*0 = 0. Thus, we want a polynomial

 (1)

such that

*p(*0*)* = *f(*0*), p’(*0*)* = *f’(*0*), p’’(*0*)* = *f’’(*0*), … , p(n)(*0*)* = *f(n)(*0*)*







 --------------------------------------------------------------------



We must have:

,

,

,

, ...,

, ...

which yields the following values for the coefficients of *p(x)*:

, , , , ... , , ...

The polynomial that results by using these coefficients in (5) is called the *nth Maclaurin polynomial for f* .

***Definition.*** If *f* can be differentiated *n* times at 0, then we define the ***nth***

***Maclaurin polynomial for f*** to be

 (7)

Note that the polynomial in (7) has the property that its value and the values of its first *n* derivatives match the values of *f* and its first *n* derivatives at *x* = 0.

**Colin Maclaurin (1698–1746)** Scottish mathematician. Maclaurin’s father, a minister, died when the boy was only six months old, and his mother when he was nine years old. He was then raised by an uncle who was also a minister. Maclaurin entered Glasgow University as a divinity student but switched to mathematics after one year. He received his Master’s degree at age 17 and, in spite of his youth, began teaching at Marischal College in Aberdeen, Scotland. He met Isaac Newton during a visit to London in 1719 and from that time on became Newton’s disciple. During that era, some of Newton’s analytic methods were bitterly attacked by major mathematicians and much of Maclaurin’s important mathematical work resulted from his efforts to defend Newton’s ideas geometrically. Maclaurin’s work, *A Treatise of Fluxions* (1742), was the first systematic formulation of Newton’s methods. The treatise was so carefully done that it was a standard of mathematical rigor in calculus until the work of Cauchy in 1821. Maclaurin was also an outstanding experimentalist; he devised numerous ingenious mechanical devices, made important astronomical observations, performed actuarial computations for insurance societies, and helped to improve maps of the islands around Scotland.

1.  функциясын қарастырайық.

Бұл функцияның туындысы  екені белгілі. Олай болса, функция мен оның барлық ретті туындыларының  нүктесіндегі мәні  болады. Табылған мәндерді (2) формуладағы орнына қойып  функциясының Маклорен қатарына жіктелуін аламыз:

  (4)

Бұл қатардың жинақталу облысы  интервалы болады.

2. Find the *n*th Maclaurin polynomials for .

Бұл функцияның туындысы:

, 

екені белгілі. Олай болса, функция мен оның барлық ретті туындыларының  нүктесіндегі мәні ():



болады. Табылған мәндерді (2) формуладағы орнына қойып  функциясының Маклорен қатарына жіктелуін аламыз:

  (5)

Бұл қатардың жинақталу облысы  интервалы болады.



3.  функциясын қарастырайық.

Жоғарыдағы ретпен қарастырып  функциясының Маклорен қатарына жіктелуін алуға болады. Егер дәрежелік қатардың қасиетін қолдансақ бұл функцияның қатарға жіктелуін  функциясының Маклорен қатарын мүшелеп дифференциалдау арқылы оңай алуға болады



Сонда:

  (6)

Бұл қатардың жинақталу облысы да  интервалы болады.



4. **Binomial series.** If is a real number, then the Maclaurin series for  , is called the ***binomial series***; it is given by

 (7)

(7) the binomial series converges to  if |*x*| *<* 1 .

**4-мысал**.  функциясын дәрежелік қатарға жіктеу керек.

Шешуі. Функцияны дәрежелік қатарға жіктеу үшін (7) формуланы қолданамыз және мұнда  болып тұр. Осы мәнді дәрежелік қатарға қойып есептесек  функциясын дәрежелік қатарға жіктелуін аламыз

 (8)

Бұл қатардың жинақталу облысы  интервалы болады.

**5-мысал**.  функциясын дәрежелік қатарға жіктеу керек.

Шешуі. Функцияны дәрежелік қатарға жіктеу үшін оның барлық ретті туындыларын тауып, олардың нолдегі мәнін есептеп, (2) формулаға қойып табуға болады. Алайда, егер келесі жайтты ескерсек, дәрежелік қатар қасиетін қолданып есептеуді оңайлатуға болады. Сонымен,

.

Олай болса, (8) қатарды 0 мен  () аралығында мүшелеп интегралдап  функциясының дәрежелік қатарға жіктелуін алуға болады екен:



Сонымен,

 (9)

Бұл қатардың жинақталу облысы  интервалы болатынын, яғни  болғанда да бұл жіктелу дұрыс екенін көрсетейік.

Шынында да,  болғанда (9) формуланың сол жағы  болады, ал оң жағы Лейбниц белгісі бойынша жинақталатын таңбасы ауыспалы қатар болады:



 аралығында (9) қатардың қалдығы  теңсіздігін қанағаттандырады, сондықтан . Олай болса, соңғы алынған қатардың қосындысы  болады екен, яғни:

  (10)

Дәрежелік қатардың көмегімен функциялардың, математикадағы иррационал сандардың, мысалы , , , мәндерін кез келген дәлдікпен есептеуге болады. Сол сияқты анықталған интегралдың мәндерін де есептеуге болады. Бір мысал қарастырайық.

***6-мысал***.  интегралын дәрежелік қатарға жіктеп, жуықтап есептеу керек.

Шешуі. Берілген интеграл «алынбайтын интеграл» екені, яғни интеграл астындағы  функцияның алғашқы функциясы элементар функциямен өрнектелмейтіндігі белгілі. Ал ол алғашқы функция дәрежелік қатар арқылы оңай өрнектеледі. Шынында да, қатарын -ке көбейтіп,



қатарын аламыз. Бұл қатар -тің кез келген мәнінде жинақталатын қатар. Осы қатарды мен аралығында интегралдап ізделінді интегралдың қатарға жіктелуін аламыз:



Осы қатынастың көмегімен *а*-ның нақты мәнінде, кез келген дәлдікпен интегралдың мәнін есептеп алуға болады.

**TAYLOR POLYNOMIALS**

Up to now we have focused on approximating a function *f* in the vicinity of *x* = 0. Now we will consider the more general case of approximating *f* in the vicinity of an arbitrary domain value *x*0. The basic idea is the same as before; we want to find an *n*th-degree polynomial *p* with the property that its value and the values of its first *n* derivatives match those of *f* at *x*0. However, rather than expressing *p(x)* in powers of *x*, it will simplify the computations if we express it in powers of *x* − *x*0; that is,

 (8)

We will leave it as an exercise for you to imitate the computations used in the case where *x*0 = 0 to show that

, , , , ... , .

Substituting these values in (8) we obtain a polynomial called the *nth Taylor polynomial about x* = *x*0 *for f .*

***Definition.*** If *f* can be differentiated *n* times at , then we define the ***nthTaylor polynomial for f about*** to be

 (9)

**The *n*th remainder**

It will be convenient to have a notation for the error in the approximation *f(x)* ≈ *pn(x)*.

Accordingly, we will let *Rn(x)* denote the difference between *f(x)* and its *n*th Taylor

polynomial; that is,

 (10)

This can also be written as

 (11)

The function *Rn(x)* is called the ***nth remainder*** for the Taylor series of *f* , and Formula (11) is called ***Taylor’s formula with remainder***.

Finding a bound for *Rn(x)* gives an indication of the accuracy of the approximation

pn(x) ≈ f(x). The following theorem, which is proved in Appendix D, provides such a bound.

**Theorem (*The Remainder Estimation Theorem*).** *If the function f can be differentiated n* + 1 *times on an interval containing the number x*0*, and if M is an upper bound for* |*f (n*+1*)(x)*| *on the interval, that is,* |*f (n*+1*)(x)*| ≤ *M for all x in the interval, then*

 (12)

*for all x in the interval.*

The bound for |*Rn(x)*| in (12) is called the ***Lagrange error bound***.

**Maclaurin and Taylor series.**

**Definition** If f has derivatives of all orders at x0, then we call the series



the ***Taylor series for f about x* = *x*0**. In the special case where *x*0 = 0, this series

becomes



in which case we call it the **Maclaurin series for f** .